TD 2 : Probabilités élémentaires et Généralités

L2 Info HLMA303 : Statistique descriptive et probabilités

Exercice 1. Soit A, B et C trois événements. Ecrire en fonction de ces trois événements les événements :

1. A et B ont lieu mais pas C ;
2. A seul a lieu ;
3. exactement deux de ces événements ont lieu ;
4. au moins deux de ces événements ont lieu ;
5. un de ces événements et un seul a lieu ;
6. au moins un de ces événements a lieu ;
7. aucun de ces événements n'a lieu ;
8. pas plus de deux de ces événements n'ont lieu.

Exercice 2. Soit X et$Y$ deux variables aléatoires représentant les coordonnées cartésiennes d'un point M pris au hasard sur un plan muni d'un repère orthonormé $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$. Soit (R, θ) les coordonnées polaires de ce point. On suppose que $\{M = 0\} = \emptyset$ et on pose $X = R\cos\theta$ et $Y = R\sin\theta$ avec $R > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$.

1. Compléter les égalités ci-dessous en remplaçant les $\ldots$ par des inégalités larges ou strictes et les lettres a, b, c par des nombres :
   $\{XY \geq 0\} - \{(X \geq 0) \cap (Y \geq 0)\} = \{a \leq \theta \ldots 3\pi/2\}$
   $\{X = Y\} - \{\theta = 5\pi/4\} = \{\theta = a\}$
   $\{X > 0\} \triangle \{Y < X\} = \{a \leq \theta < b\} \cup \{5\pi/4 \ldots \theta \ldots 3\pi/2\}$
2. Ecrire les événements suivants en fonction de R et θ : $\{Y > 0\}$, $\{X = Y\}$, $\{X + Y > 0\}$, $\{X^2 + Y^2 \leq 1\}$ et $\{Y \leq |X|\}$.

Exercice 3. On jette deux dés. Soit X et Y le nombre de points marqués par chacun de ces dés et soit $S = X + Y$. Pour tout entier $2 \leq n \leq 12$, écrire l'événement $\{S = n\}$ en fonction d'événements du type $\{X = i\}$ et $\{Y = j\}$.

Exercice 4. Soit A un événement aléatoire. On appelle variable aléatoire indicatrice de A une variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon

1. Exprimer en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ les variables $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\triangle B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$.
2. Que dire de A et B si $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$?

Exercice 5. On enregistre le nombre de passagers par voiture passant par un poste de péage un jour de retour de vacances. Soit T le nombre de voitures passées par ce péage ce jour-là. Soit X_n le nombre de passagers de la $n^{\text{ème}}$ voiture, conducteur compris. Que représentent les variables aléatoires :

$$\sum_{n=1}^{T} X_n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{T} \mathbb{1}_{\{X_n \geq 4\}} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{T} X_n \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{T} X_n - \sum_{n=1}^{T} X_n \mathbb{1}_{\{X_n \geq 2\}}$$

Exercice 6. Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 5/12$, $\mathbb{P}(B) = 7/12$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A^c)$, $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$, $\mathbb{P}(A^c \cup B^c)$, $\mathbb{P}(A \cup B^c)$ et $\mathbb{P}(A \triangle B)$.

Exercice 7. Trois coureurs cyclistes A, B et C participent à un sprint à l'arrivée de Paris-Roubaix. On estime que A a deux fois plus de chances de gagner que B et que B a deux fois plus de chances de gagner que C. Quelles sont les probabilités de gagner de chaque coureur ?

Exercice 8. Problème des anniversaires
Des étudiants au nombre de n sont réunis dans un amphi : quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour ? On suppose qu'aucun n'est né un 29 février et que $n \leq 365$.

Exercice 9. Deux amis font partie d'un groupe de n personnes, auxquelles on a distribué au hasard des numéros d'ordre pour constituer une file d'attente.

1. Avec quelle probabilité sont-ils les deux premiers ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'ils soient distants de r places (c'est-à-dire séparés par $r-1$ personnes) ? Quelle est la distance la plus probable entre les deux amis ?

Exercice 10. Une application de la formule de Poincaré
Au cours d'une soirée, chacune des n personnes invitées dépose son parapluie à l'entrée. A la fin de la soirée, l'ampoule étant cassée, elles reprennent chacune un parapluie au hasard. On se propose de calculer la probabilité de l'événement A :"aucun invité n'est reparti avec son parapluie".

1. On numérote les invités de 1 à n et on note B_i l'événement "le $i^{\text{ème}}$ invité est reparti avec son parapluie". Calculer $\mathbb{P}(B_i)$ puis $\mathbb{P}(B_i \cap B_j)$ où $i \neq j$.
2. Exprimer l'événement A en fonction des B_i. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Vers quoi tend cette probabilité lorsque $n \to \infty$?

Exercice 11. On lance deux dés à 6 faces et on considère les événements
– A : "le résultat du premier dé est impair"
– B : "le résultat du second dé est pair"
– C : "les résultats des deux dés sont de même parité"
Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C).$$

Exercice 12. On jette trois fois une pièce de monnaie et on considère la suite des résultats. On pose donc $\Omega = \{p, f\}^3$ que l'on munit de la probabilité uniforme. On considère les événements
– $A = \{ppp, ppf, pfp, pff\}$
– $B = \{ppp, ppf, pfp, fpp\}$
– $C = \{ppp, fpf, ffp, fff\}$
Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$. Cette famille d'événements est-elle indépendante ?

Exercice 13. Soit A, B et C trois événements indépendants. Montrer que A est indépendant de $B \cup C$.

Exercice 14. Un événement certain Ω peut être partitionné en quatre événements A, B, C, D d'un côté, et en trois événements E, F, G de l'autre. Les probabilités des intersections des événements de ces deux partitions sont données ci-dessous.

	A	B	C	D
E	0	0.3	0.2	0.1
F	0.1	0	0.1	0
G	0.1	0.1	0	0

Quelles sont les probabilités de chacun des événements ? Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}^G(A)$, $\mathbb{P}^E(C)$ et $\mathbb{P}^{A\cup B}(E\cup F)$.

Exercice 15. Probabilités conditionnelles en cascade
Une urne contient n boules rouges et n blanches. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

Exercice 16. On dispose de quatre dés A, B, C et D non pipés, connus comme les *dés non transitifs d'Efron* :
– les faces du dé A sont 0, 0, 4, 4, 4 et 4 ;
– les faces du dé B sont 3, 3, 3, 3, 3 et 3 ;
– les faces du dé C sont 2, 2, 2, 2, 6 et 6 ;
– les faces du dé D sont 1, 1, 1, 5, 5 et 5 ;
On lance ces dés simultanément et on note A le numéro obtenu sur le dé A, ...

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A > B)$, $\mathbb{P}(B > C)$, $\mathbb{P}(C > D)$ et $\mathbb{P}(D > A)$?
2. Deux joueurs s'affrontent à présent. Le joueur 1 choisit le dé qu'il veut parmi les quatre, puis le joueur 2 parmi les trois restants. Le gagnant est ensuite celui qui obtient la plus grande valeur avec son dé. Vaut-il mieux être le joueur 1 ou le joueur 2 ?

Exercice 17. Une femme et un homme atteints d'une certaine maladie attendent un enfant, lequel a dans ces conditions une probabilité 0.6 d'être lui aussi atteint par la maladie. Un test est effectué sur l'enfant pendant la grossesse, fiable pour 70% des personnes atteintes par la maladie et pour 90% des personnes saines. Le test répond "non malade". Avec quelle probabilité l'enfant est-il tout de même malade ?

Exercice 18. Une famille a deux enfants.

1. On sait que l'un des deux enfants est un garçon. Quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit aussi un garçon ?
2. On sait que l'un des deux enfants est un garçon et que l'autre enfant est plus jeune. Quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit aussi un garçon ?

Exercice 19. Blanche-Neige passe la serpillère quand la Méchante Reine se présente, grimée en pauvre vieille, pour lui offrir un panier de cinq pommes dont une est empoisonnée et deux véreuses. Blanche-Neige prend les pommes une à une pour les croquer. Si elle tombe sur une pomme véreuse, elle jette le reste des pommes au cochon, sinon le conte continue. Calculer la probabilité pour que :

1. Blanche-Neige mange toutes les bonnes pommes.
2. le cochon trépasse.