TD 3 : Probabilités élémentaires et Généralités

L2 Info HLMA303 : Statistique descriptive et probabilités

Exercice 1. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$. On pose :

$$I = \min(U, V) \text{ et } S = \max(U, V).$$

1. Que vaut $\mathbb{P}(I \geq i)$, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$? En déduire la loi de I.
2. Montrer que $\mathbb{E}(I) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$ et en déduire l'espérance de S sans calculer sa loi.
3. Les variables I et S sont-elles indépendantes ? Donner la loi du couple (I, S).

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire discrète de moyenne m et de variance σ^2.

1. Démontrer que la fonction $g(t) = \mathbb{E}(X-t)^2$ est minimale pour $t = m$. Que vaut son minimum ?
2. Démontrer que

$$\mathbb{E}(X^2) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = 0) = 1 \text{ et } \sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = m) = 1.$$

Exercice 3. Soit A et B deux événements aléatoires tels que

$$\mathbb{P}(A) = 1/2, \quad \mathbb{P}(B) = 1/3 \text{ et } \mathbb{P}(A \cap B) = 1/4.$$

Déterminer la loi, l'espérance et l'écart-type de $X = \mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_B$.

Exercice 4. Deux amis font partie d'un groupe de n personnes, auxquelles on a distribué au hasard des numéros d'ordre pour constituer une file d'attente (cf exo 12 du TD 1). Quelle est la distance moyenne entre les deux amis ? Donner également sa variance.

Exercice 5. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et de même loi telle que $\mathbb{P}(U = -1) = 1/3$ et $\mathbb{P}(U = 1) = 2/3$. On pose $X = U$ et $Y = \text{signe}(U)\, V$.

1. Quelle est la loi du couple (X, Y) ? Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. Montrer que la loi est sans mémoire, i.e.

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^{*2}, \mathbb{P}(X > n + k | X > k) = \mathbb{P}(X > n).$$

Exercice 7. Un insecte pond des oeufs suivant une loi de Poisson $\mathbb{P}(\lambda)$. Chaque oeuf à une probabilité p d'éclore, indépendamment des autres oeufs. Soit Z le nombre d'oeufs qui ont éclos. Donner la loi de Z et en déduire son espérance.

Exercice 8. Un voyage organisé (séjour au ski par exemple) peut accueillir 95 personnes. La pratique montre que l'on peut estimer à 5% la probabilité qu'une réservation soit annulée avant le départ. Le voyagiste fait du surbooking et il accepte 100 réservations. Quelle est la probabilité que le voyagiste soit obligé de refuser un client ayant réservé ?

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$.
2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à N. On fait un tirage avec replacement de n boules et on note X le plus grand numéro tiré.

   a) Déduire de la question 1 que $\mathbb{E}(X) = N - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

   b) Montrer que si N grand, $\mathbb{E}(X) \approx N\frac{n}{n+1}$.

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est définie par : $\mathbb{P}(X = k) = p_k, \forall k \in \mathbb{N}$.

1. On considère la fonction génératrice de X : $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k\, \mathbb{P}(X = k)$.

   a) Démontrer que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

   b) Démontrer que $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'^2_X(1)$.
2. Utiliser ces résultats pour retrouver la moyenne et la variance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
3. Utiliser ces résultats pour retrouver la moyenne et la variance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.