Licence 3 Informatiques
Informatique et aléatoire

Université Grenoble Alpes
2017-2018

TD 1 Espaces probabilisés, Indépendance et Conditionnement

Myriam TAMI[1], Massih-Reza AMINI

Exercice 1 Soit A, B et C trois événements. Ecrire en fonction de ces trois événements les événements :

1. A et B ont lieu mais pas C
2. A seul a lieu
3. Exactement deux de ces événements ont lieu
4. Au moins deux de ces événements ont lieu
5. Un de ces événements et un seul a lieu
6. Au moins un de ces événements a lieu
7. Aucun de ces événements n'a lieu
8. Pas plus de deux de ces événements n'ont lieu

Exercice 2 Soit A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{7}{12}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Calculer $P(A \cup B)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$, $P(A \cup \bar{B})$

Exercice 3 Un fumeur tente d'allumer sa cigarette au pied de l'immeuble de son entreprise un jour de grand vent. Il dispose d'un stock d'allumette inépuisable. Soit A_n l'événement "le vent éteint l'allumette à la n-ième tentative". Soit N le nombre d'allumette utilisées pour allumer la cigarette. Écrire N à l'aide des événements A_n.

Exercice 4 On lance deux dés à 6 faces et on considère les événements

— A : "le résultat du premier est impair"
— B : "le résultat du second dé est pair"
— C : "les résultats des deux dés sont de même parité"

Montrer que les événements A, B et C sont deux a deux independants mais que

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$$

Exercice 5 On jette trois fois une pièce de monnaie et on considère la suite des résultats. On pose donc $\Omega = p, f^3$ que l'on munit de la probabilité uniforme. On considère les événements

— $A = \{ppp, ppf, pfp, pff\}$
— $B = \{ppp, ppf, pfp, fpp\}$
— $C = \{ppp, fpf, ffp, fff\}$

Montrer que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. Cette famille d'événements est-elle indépendante ?

1. myriam.tami@univ-grenoble-alpes.fr

Exercice 6 Un événement certain Ω peut être partitionné en quatre événements A, B, C, D d'un côté, et en trois événements E, F, G de l'autre. Les probabilités des **intersections** des événements de ces deux partitions sont donnees ci-dessous.

	A	B	C	D
E	0	0.3	0.2	0.1
F	0.1	0	0.1	0
G	0.1	0.1	0	0

Table 1 – Probabilités des intersections des événements des deux partitions d'un événement certain Ω

Qu'elles sont les probabilités de chacun des événements ? Calculer les probabilités conditionnelles $P(A|G)$, $P(C|E)$ et $P(E \cup F|A \cup B)$.

Exercice 7 On dispose de quatre des A, B, C et D non pipes, connus comme les *dés non transitifs d'Efron* :

— les faces du dé A sont 0, 0, 4, 4, 4 et 4 ;
— les faces du de B sont 3, 3, 3, 3, 3 et 3 ;
— les faces du de C sont 2, 2, 2, 2, 6 et 6 ;
— les faces du de D sont 1, 1, 1, 5, 5 et 5 ;

On lance ces dés simultanément et on note A le numéro obtenu sur le de A, ...

1. Calculer les probabilités $P(A > B)$, $P(B > C)$, $P(C > D)$ et $P(D > A)$?
2. Deux joueurs s'affrontent à présent. Le joueur 1 choisit le dé qu'il veut parmi les quatre, puis le joueur 2 parmi les trois restants. Le gagnant est ensuite celui qui obtient la plus grande valeur avec son de. Vaut-il mieux être le joueur 1 ou le joueur 2 ?

Exercice 8 Une femme et un homme atteints d'une certaine maladie attendent un enfant, lequel a dans ces conditions une probabilité 0.6 d'être lui aussi atteint par la maladie. Un test est effectue sur l'enfant pendant la grossesse, fiable pour 70% des personnes atteintes par la maladie et pour 90% des personnes saines. Le test répond "non malade". Avec quelle probabilité l'enfant est-il tout de meme malade ?

Exercice 9 Une famille a deux enfants.

1. On sait que l'un des deux enfants est un garçon. Quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit aussi un garçon ?
2. On sait que l'un des deux enfants est un garçon et que l'autre enfant est plus jeune. Quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit aussi un garçon ?

Exercice 10 On lance deux dés non pipés et on note X la moyenne des valeurs obtenues. Montrer que X est une variable aléatoire réelle discrète et donner sa loi de probabilité.
Indication :

— Écrire Ω
— Définir l'événement $X = x$ et vérifier qu'il est bien inclus dans la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$
— Définir son support pour vérifier qu'elle est discrète
— Calculer les probabilités pour toutes les valeurs du support pouvant être prises par X (i.e : tous les x pour lesquels on a un événement $X = x$).

Licence 3 Informatiques
Informatique et aléatoire

Université Grenoble Alpes
2017-2018

TD 2 Variables aléatoires, Inégalités et Lois de probabilité

Myriam TAMI[1], Massih-Reza AMINI

Exercice 1 (Sujet d'examen de l'année précédente) Une entreprise $\mathcal{E}$ dispose de plusieurs sites éparpillés dans le monde. Elle veut se doter d'un système de reconnaissance pour les entrées-sorties de son personnel. Pour cela, les ingénieurs R&D de $\mathcal{E}$ travaillant sur un site A, fabriquent un *robot* capable de distinguer les visiteurs des employés de leur site[2].

Ce *robot*, n'étant pas parfait, se trompe sur l'identité d'une personne choisie aléatoirement (soit un employé soit un visiteur) avec une probabilité fixe égale à q. Les dirigeants de $\mathcal{E}$ veulent avoir une estimation de cette probabilité afin de décider de l'installation du robot sur l'ensemble de leurs autres sites. Pour cela, ils choisissent un site test B différent de A. Le nombre d'employés et de visiteurs servant aux tests sur ce second site est égal à $n = 1073$.

1. Soit X la variable aléatoire binaire égale à 1 si le robot reconnaît mal une personne prise au hasard sur le site B et 0 sinon. Quelle est la loi de X ? On précisera également son espérance et sa variance en fonction de q.
2. On note $Y = \frac{X_1+...+X_n}{n}$, le nombre moyen de personnes mal reconnues par le *robot* sur B. Quelles sont l'espérance et la variance de Y en fonction de q et de n ?
3. Pour une valeur réelle $\epsilon > 0$ fixée, donnez une minoration de la probabilité $P(|Y - q| \leq \epsilon)$ en fonction de q, n et ϵ.
4. Sur le site B, le *robot* se trompe 62 fois. En déduire d'après la question précédente l'intervalle de valeurs de q avec une confiance de 95% (tel que $P(|Y - q| \leq \epsilon) \geq 0.95$).

   Les dirigeants de $\mathcal{E}$ veulent qu'en moyenne le *robot* fasse moins de 7 erreurs de reconnaissance sur le site mère $\mathcal{M}$ comportant 100 personnes.

5. En déduire d'après la question 4, l'intervalle du nombre moyen d'erreurs de reconnaissance du *robot* sur $\mathcal{M}$. D'après ce résultat le *robot* satisfait-t-il les attentes des dirigeants ?

   Après ce premier examen, les dirigeants veulent savoir s'il y a un moyen de trouver un intervalle plus précis pour q. Le statisticien chargé de l'étude note pour cela $Z = n \times Y$.

6. Que traduit la *v.a.* Z, quels sont l'ensemble de ses valeurs et sa loi (on précisera ses paramètres) ?

   Pour trouver par un autre moyen l'intervalle des valeurs de q, le statisticien définit en plus $Bin(n, k, q) = P(Z \leq k)$, la probabilité que le *robot* se trompe sur l'identité d'au plus $k \leq n$ personnes sur le site B.

---

1. myriam.tami@univ-grenoble-alpes.fr

2. Cette reconnaissance est basée sur certaines caractéristiques fixes qui sont extraites dans un premier temps par les caméras du *robot* et qui sont communes aussi bien aux employés qu'aux visiteurs.

7. Donnez l'expression analytique de $Bin(n, k, q)$.

   À partir de cette définition, il trouve une nouvelle borne pour q égale à $[0.06, 0.07]$ avec une confiance de 95%

8. Ce nouvel intervalle est-il plus ou moins précis que celui trouvé à la question 4 ? Quelle en est la raison ?
9. Quel est le nombre moyen d'employés de $\mathcal{M}$ mal-reconnus par le *robot* avec ce nouveau résultat ? Le *robot* sera-t-il finalement installé sur les sites de $\mathcal{E}$?

Exercice 2 La loi de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0.25	p_2	0.18	p_4	0.37

— Déterminez les valeurs de p_2 et de p_4 sachant que les événements correspondants sont équiprobables
— Quelle est l'espérance de X ? sa variance ?

Exercice 3 Une urne contient des boules de trois couleurs différentes : 7 boules bleues, 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire une boule au hasard et l'on note X sa couleur.
— Donnez la loi de X
— Calculez l'espérance et la variance de X

Exercice 4 Dans une collection de documents, les textes contiennent en moyenne 1000 caractères avec un écart-type de 200, quelle est la probabilité qu'un document contienne plus de 600 et moins de 1400 caractères ?

Exercice 5 On suppose que la concentration C en saccharose d'un organisme suit une loi normale de paramètres $\mu = 65mg/cl$ et $\sigma = 25mg/cl$. La densité de C est donnée par :

$$f(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{(c-\mu)^2}{2\sigma^2}).$$

1. Expliquer le rôle de μ et σ sur la forme de la densité. Tracer la densité et en donner les principales caractéristiques.
2. Calculer les probabilités pour qu'un organisme choisi au hasard :
   — ait une concentration en saccharose supérieure à $85mg/cl$.
   — ait une concentration en saccharose inférieure à $45mg/cl$.
   — ait une concentration en saccharose comprise entre $45mg/cl$ et $85mg/cl$.
3. Déterminer un intervalle $[a, b]$ centré en μ tel qu'un individu choisi au hasard ait 95% de chance d'avoir une concentration comprise entre a et b.

Exercice 6 On s'intéresse au résultat *pile* de lancé d'une pièce de monnaie truquée. On note X ce résultat, $X \in \mathcal{X} = \{0, 1\}$ i.e. $(X = 0)$ (resp. $(X = 1)$) signifie qu'on a eu *pile* au lancé correspondant.
— Donnez la loi de X,

— Calculez l'espérance et la variance de cette variable,

— On souhaite savoir à quel point la pièce est truquée (i.e. estimer $P(X = 1)$), pour cela on lance n fois la pièce et on note $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, le nombre moyen de *pile* ayant été obtenu suite à ce lancé. Exprimez l'espérance et la variance de Y en fonction de celles de X.

— Pour une probabilité d'obtention de *pile* donnée p, Quelle est la probabilité que la moyenne des piles après n lancés dévie de p ?

— Donnez une majoration de la probabilité que cette déviation soit plus petite ou égale un nombre réel $\epsilon > 0$ donné.

— Déterminez l'intervalle de valeurs de p, avec une confiance de 0.99, quand après 10000 lancés on a obtenu 6300 piles.

Exercice 7 Un journal d'automobiles a noté sur une échelle de 10, la tenue de route (notée par X) et le confort (notée par Y) des véhicules suivantes :

Marque	X	Y
Fiat	6	7
Peugeot	8	7
Renault	7	6
WV	9	9

— Calculer l'espérance et la variance des variables X et Y en supposant q'elles suivent une loi uniforme.

— Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y

— Peut-on en déduire que X et Y sont linéairement dépendantes ?